

Dinâmica discreta aplicada à economia

Bernardo Kulnig Pagnoncelli* e Carlos Frederico Borges Palmeira

Departamento de Matemática, PUC-Rio

e-mail: {bernardo, fredpalm}@mat.puc-rio.br

Resumo

Este minicurso tem origem em um seminário de dinâmica aplicada à economia organizado pelo 2º autor no primeiro semestre de 2006 no Departamento de Matemática da PUC-Rio, no qual o 1º autor foi o mais ativo participante. A referência básica é o livro Economic Dynamics de R. Shone [1]. Apresentamos modelos de oferta e demanda lineares e não lineares, modelos de oligopólios e um modelo macroeconômico de crescimento de um país.

Palavras-chave: Dinâmica discreta, modelos de oferta e demanda, oligopólios e caos.

*O autor agradece a Funenseg pelo suporte financeiro.

Sumário

1	Introdução	3
2	Teia de aranha	4
3	Modelos de oferta e demanda	4
3.1	Alterando a evolução do preço esperado	6
3.2	Dois exemplos não-lineares	6
3.3	Um modelo com dois mercados inter-relacionados	8
4	Um modelo não linear levando ao caos	9
4.1	A equação logística discreta	9
4.2	Um modelo de oferta e demanda não linear	13
5	Dinâmica de oligopólios	16
5.1	O modelo dinâmico	16
5.2	Custos quadráticos	18
6	O modelo não linear de ciclos comerciais de Hicks	19
6.1	O modelo bi-dimensional	20
6.2	O modelo tridimensional	21

1 Introdução

Modelos matemáticos que tratam de evolução no tempo costumam considerar que o mesmo varia continuamente. Afinal, esta é a base do modelo newtoniano da mecânica clássica, a modelagem mais bem sucedida da história. Entretanto, a situação é diferente quando se trata de dinheiro. Salários são pagos mensalmente, prestações também; o imposto de renda é anual, etc. Neste mini-curso veremos alguns modelos simples de evolução no tempo, que nesse texto é considerado como uma variável discreta. Isto simplifica bastante a matemática envolvida: nada de equações diferenciais. Estas serão substituídas por equações de diferenças, que, em geral, podem ser exploradas com facilidade em computador, com uma planilha eletrônica. Vamos a um primeiro exemplo: coloco 50 reais na poupança hoje. O banco paga juros de meio por cento ao mês. Quanto terei em 10 anos? Chamando de Q_n a quantidade de dinheiro que tenho após n meses, temos

$$\begin{aligned} Q_0 &= 50 \\ Q_1 &= Q_0 + 0.005Q_0 \\ Q_2 &= Q_1 + 0.005Q_1 \\ &\vdots \\ Q_n &= Q_{n-1} + 0.005Q_{n-1} \end{aligned}$$

Quero calcular o valor de Q_{120} . Usando uma planilha, é só colocar 50 na célula A1 e escrever em A2 a expressão $= A1 + 0.005 * A1$, depois copiar e colar até a célula 120. Obtemos todos os valores, e o resultado final é que ao fim de 10 anos terei 90.52 reais. Na verdade é fácil obter uma fórmula geral para Q_n , pois $Q_{n+1} = 1.005Q_n$, o que implica trivialmente que $Q_n = Q_0(1.005)^n$. Basta então calcular $(1.005)^{120}$ e aí eu preciso de ajuda, seja de um computador, de uma boa calculadora, ou uma velha tábua de logaritmos. Uma aproximação razoável pode também ser calculada usando a fórmula do binômio para $(1 + 0.005)^{120}$ com 3 termos, obtendo

$$1 + 120 \cdot 0.005 + (120 \cdot 119/2) \cdot 0.000025 = 1.77,$$

pois o próximo termo já é da ordem de 0.01.

A grande vantagem de uma fórmula geral como $Q_n = Q_0(1.005)^n$ é que podemos fazer o limite quando n vai ao infinito e prever o comportamento de Q_n . No caso temos uma expressão da forma a^n , com $a > 1$, logo vai ao infinito, ou seja a poupança cresce infinitamente, só que bem devagar. Podemos considerar também a poupança programada: colocamos 50 reais todo mês por 10 anos. Novamente a planilha eletrônica nos dá a resposta de modo semelhante ao anterior. Basta colocar em A2 o valor $= A1 * 1.005 + 50$. O resultado final será que ao fim de 10 anos terei 8 197 reais, o que é muito mais que os 6 000 reais que eu teria colocando debaixo do colchão! Aqui a obtenção da fórmula

geral não é tão imediata. Uma maneira é calcular alguns termos e depois usar o princípio da indução para concluir que, sendo $Q_{n+1} = aQ_n + b$, então a fórmula geral é

$$Q_n = a^n Q_0 + b(1 - a^n)/(1 - a).$$

Mais geralmente, temos uma função $f(x)$ e queremos estudar a seqüência dada por $x_{n+1} = f(x_n)$. O ponto de vista que iremos adotar é o dinâmico, isto é, pensaremos em n como a variação discreta do tempo e queremos saber para onde vão os diferentes valores iniciais x_0 .

2 Teia de aranha

Desenhando o gráfico da função $f(x)$, temos uma maneira prática de ver a evolução do ponto x_0 , constituindo o que chamamos de sua trajetória (o conjunto $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$). Marcamos no eixo horizontal o ponto x_0 . Desenhamos a linha vertical por x_0 até encontrar o gráfico, no ponto $(x_0, f(x_0))$. Traçamos a horizontal por este ponto até encontrar a reta $y = x$. Este é o ponto (x_1, x_1) , já que $x_1 = f(x_0)$. Por este ponto traçamos a vertical até encontrar o gráfico de f no ponto $(x_1, f(x_1))$. De novo, a horizontal até a reta $y = x$ nos dá o ponto (x_2, x_2) , e assim por diante. Na Figura 1 temos uma escada, já na Figura 2 temos uma teia convergindo para a interseção do gráfico e da reta, ou seja para o ponto em que $f(x) = x$. Nas próximas seções, vamos aplicar essas idéias a modelos econômicos.

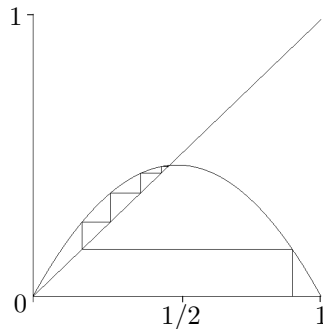


Figura 1: $f(x) = 1.9x(1 - x)$.

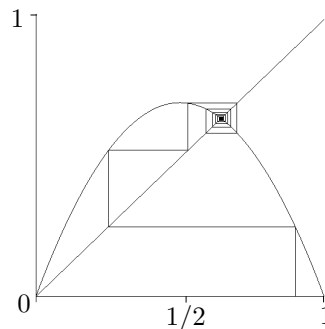


Figura 2: $f(x) = 2.8x(1 - x)$.

3 Modelos de oferta e demanda

Vamos começar com um modelo simples, com origem na agricultura. As variáveis envolvidas são o preço do produto, as quantidades produzidas (e ofertadas ao mercado) e as quantidades demandadas (o que o mercado se dispõe a comprar). Supomos que a quantidade demandada no tempo t é função do preço vigente no tempo t , e a quantidade oferecida no tempo t é função de um preço esperado

no tempo t . Preço esperado e não preço vigente, porque a decisão do quanto será produzido tem que ser tomada em tempos anteriores; afinal, as plantas e os animais demoram a crescer. Um modelo simples, proposto por Ezequiel [2] é

$$\begin{aligned}q_{d,t} &= a - bp_t \\ q_{o,t} &= c + dp_{t,e},\end{aligned}$$

onde a, b, c, d são constantes positivas, $q_{d,t}$ é a quantidade demandada no tempo t , $q_{o,t}$ é a quantidade oferecida no tempo t , p_t é o preço no tempo t e $p_{e,t}$ é o preço esperado no tempo t . Há duas hipóteses adicionais: a primeira é que a cada instante t as quantidades oferecida e demandada são iguais (tudo o que se produz é vendido), e a segunda é a que define o preço esperado. Vamos supor que $p_{e,t} = p_{t-1}$, ou seja o produtor espera que o preço vai se manter o mesmo. Temos então:

$$\begin{aligned}q_{d,t} &= a - bp_t \\ q_{o,t} &= c + dp_{t-1} \\ q_{d,t} &= q_{o,t}.\end{aligned}$$

Obtemos assim uma equação para p_t que é a mesma da poupança programada:

$$p_t = A + Bp_{t-1}, \text{ onde } A = (a - c)/b \text{ e } B = -d/b. \quad (1)$$

Esta equação tem um ponto fixo, também chamado ponto de equilíbrio, $p^* = A/(1 - B)$. Isto é, se $p_0 = p^*$, então para todo t , teremos $p_t = p^*$. Fazendo a mudança de variável $p'_t = p_t - p^*$, a equação fica

$$p'_t = Bp'_{t-1},$$

cujas soluções são $p'_t = B^t p'_0$. Voltando para os dados originais, temos

$$p_t = (a - c)/(b + d) + (-d/b)^t [p_0 - (a - c)/(d + b)].$$

Como evolui o preço p_t ? É fácil ver que se $d/b < 1$ temos que $(d/b)^t$ vai a zero e o mercado tende ao equilíbrio. Se $b = d$ há uma oscilação entre dois valores (em linguagem precisa, a trajetória é periódica de período 2) e se $d/b > 1$, os preços oscilam entre valores cada vez maiores e o equilíbrio não é atingido. Observe que, desenhando as curvas de oferta e demanda, o ponto de equilíbrio está na intersecção das duas curvas. O que acontece se $a < c$? Do ponto de vista matemático, o ponto fixo se desloca para a região $p < 0$, o que não tem significado na modelagem, pois esta perde a validade se os preços ficam negativos. A mesma perda de validade vai ocorrer no caso $d/b > 1$, com as oscilações aumentando cada vez mais em módulo, até que, de novo, teríamos $p < 0$. Mais tarde veremos modelos que incorporam este tipo de limitação ($p > 0$). De novo podemos usar uma planilha eletrônica para explorar exemplos numéricos e o Maple[©] para fazer a teia. Os comandos estão disponíveis em <http://www.mat.puc-rio.br/~bernardo>.

Voltando à dinâmica unidimensional geral $x_t = f(x_{t-1})$, não é difícil demonstrar que, se x^* é um ponto fixo de f e a derivada $f'(x^*)$ tem módulo menor que 1, então existe uma vizinhança de x^* tal que a seqüência converge para x^* sempre que x_0 estiver nesta vizinhança. Nesse caso, dizemos que o equilíbrio é *localmente estável*. Ao contrário, se $|f'(x^*)| > 1$, então a seqüência se afasta do equilíbrio, para toda condição inicial próxima. O equilíbrio é dito *localmente instável*. Se $|f'(x^*)| = 1$, a estabilidade depende do próximo termo não nulo da expansão de Taylor de $f(x)$ em torno de x^* .

3.1 Alterando a evolução do preço esperado

Vamos agora modificar o nosso modelo, mexendo no preço esperado. Uma hipótese razoável é levar em conta a diferença entre o preço esperado do período anterior e o preço real, isto é, escrever $p_t^e = p_{t-1}^e - \lambda(p_{t-1}^e - p_{t-1})$. Observemos que se $\lambda = 0$, temos um preço esperado constante, e se $\lambda = 1$ temos $p_t^e = p_{t-1}$. Temos então:

$$q_t^d = a - bp_t \quad (2)$$

$$q_t^o = c + dp_t^e \quad (3)$$

$$p_t^e = p_{t-1}^e - \lambda(p_{t-1}^e - p_{t-1}) \quad (4)$$

$$q_t^d = q_t^o = q_t. \quad (5)$$

Não é difícil eliminar p^e e obter uma equação relacionando p_t e p_{t-1} . Igualando (2) e (3), segue que $p_t^e = (a - bp_t - c)/d$, e trocando t por $t - 1$, $p_{t-1}^e = (a - bp_{t-1} - c)/d$. Substituindo em (4), vem

$$(a - bp_t - c)/d = (a - bp_{t-1} - c)/d - \lambda[(a - bp_{t-1} - c)/d - p_{t-1}].$$

Resolvendo em p_t , temos:

$$p_t = \lambda(a - c)/b + [1 - \lambda - (\lambda d/b)]p_{t-1}.$$

Novamente temos uma equação da forma $p_t = A + Bp_{t-1}$, análoga a equação (1). Portanto, a solução tenderá ao ponto de equilíbrio $p^* = A/(1 - B)$ se e só se tivermos $|B| < 1$.

Ainda considerando modelos lineares, podemos modificar o preço esperado para levar em conta a tendência dos preços nos períodos anteriores; por exemplo, definindo $p_t^e = p_{t-1} + \eta(p_{t-1} - p_{t-2})$. Este é o modelo de Goodwin, que leva a uma equação de recorrência de segunda ordem em p_t , isto é, que envolve p_t , p_{t-1} e p_{t-2} , mas ainda linear e de coeficientes constantes, facilmente solúvel.

3.2 Dois exemplos não-lineares

Observe que qualquer dinâmica unidimensional, linear ou não, pode ser estudada numericamente através da teia de aranha. Basta entrar com a função f dada

no programa disponível na página mencionada. Vejamos dois exemplos de não linearidade:

$$\begin{aligned}q_t^d &= 4 - 3p_t \\q_t^o &= p_{t-1}^2 \\q_t^d &= q_t^o.\end{aligned}$$

A equação de p_t é $p_t = 4/3 - (1/3)p_{t-1}^2$, que tem um ponto de equilíbrio $p^* = 1$. Fazendo-se a teia, vemos que o equilíbrio é estável, e de fato, sendo $f(p) = 4/3 - (1/3)p^2$, temos $f'(1) = -2/3$, cujo módulo é menor que 1.

Outro tipo de não linearidade importante aparece quando estabelecemos teto e piso para o preço. Suponha que

$$\begin{aligned}q_t^d &= 42 - 4p_t \\q_t^o &= 2 + 6p_{t-1} \\q_t^d &= q_t^o.\end{aligned}$$

A equação de p_t é $p_t = 10 - 1.5p_{t-1}$, que tem $p^* = 4$ como equilíbrio, mas agora $f'(4) = -6$, e o equilíbrio é instável. A teia ilustra as oscilações cada vez maiores dos preços. Acrescente agora ao modelo um teto para o preço: por exemplo, os preços não podem passar de 6. Este valor é atingido por p_t quando $p_{t-1} = 8/3$, e como $f(p) = 10 - 1.5p$ é uma função decrescente, a equação fica $p_t = g(p_{t-1})$, com $g(p) = 6$ se $p < 8/3$, $g(p) = 10 - 1.5p$ se $8/3 < p \leq 20/3$ e $g(p) = 0$ se $p > 20/3$. A Figura 3 foi gerada em Maple[©] e os comandos estão disponíveis na página.

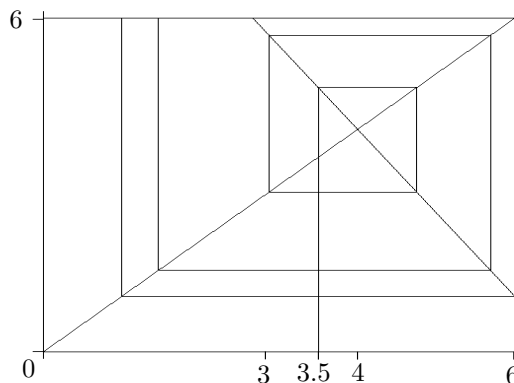


Figura 3: Teia de aranha com $p_0 = 3.5$.

Escolhemos como condição inicial $p_0 = 3.5$ e rodamos 20 iterações. Observe que a teia se afasta do equilíbrio $p^* = 4$. Assim que ela alcança o teto de preço o sistema inicia um comportamento periódico, oscilando indefinidamente entre os valores $p = 1$ e $p = 6$.

3.3 Um modelo com dois mercados inter-relacionados

Vamos agora considerar dois mercados relacionados entre si. Ainda faremos hipóteses de linearidade, levando a um sistema de equações lineares de recorrência, que pode ser tratado facilmente com um pouco de álgebra linear. Consideremos dois mercados: o do milho e o do porco. Para o do milho usaremos o nosso primeiro modelo de oferta e demanda, mas no mercado do porco entra o preço esperado para o milho que o criador compra para engordar o porco. Segundo [1], este modelo foi estudado por Ezequiel em 1938 e por Waugh em 1964.

Sejam d_m e d_p as demandas de milho e porco respectivamente, of_m e of_p as ofertas, e p_m e p_p os preços. O modelo para o mercado de milho é:

$$\begin{aligned}d_{m,t} &= a_1 - b_1 p_{m,t} \\ of_{m,t} &= c_1 + d_1 p_{m,t-1} \\ d_{m,t} &= of_{m,t},\end{aligned}\tag{6}$$

e para mercado do porco é

$$\begin{aligned}d_{p,t} &= a_2 - b_2 p_{p,t} \\ of_{p,t} &= c_2 + d_2 p_{p,t-1} - e p_{m,t-1} \\ d_{p,t} &= of_{p,t}.\end{aligned}\tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Este é um modelo simples. As equações são lineares, e os preços esperados no tempo t são os preços praticados no tempo $t - 1$. Todas as constantes são positivas. O preço do milho influencia negativamente a oferta de porco, afinal se o alimento do porco está caro sua oferta diminui (7). Tal como antes, obtemos equações de recorrência nos preços, usando as igualdades (6) e (8) entre oferta e demanda. Temos:

$$\begin{aligned}p_{m,t} &= (a_1 - b_1)/c_1 - (d_1/b_1)p_{m,t-1} \\ p_{p,t} &= (a_2 - b_2)/c_2 - (d_2/b_2)p_{p,t-1} + (e/b_2)p_{m,t-1}.\end{aligned}$$

Sejam p_m^* e p_p^* os preços de equilíbrio dos mercados de milho e porco respectivamente. Fazendo as mudanças de variáveis $pr_{m,t} = p_{m,t} - p_m^*$ e $pr_{p,t} = p_{p,t} - p_p^*$, obtemos o sistema da forma

$$\begin{aligned}pr_{m,t} &= -(d_1/b_1)pr_{m,t-1} \\ pr_{p,t} &= -(d_2/b_2)pr_{p,t-1} + (e/b_2)pr_{m,t-1}\end{aligned}$$

Temos um sistema

$$\begin{aligned}pr_{m,t} &= A_1 pr_{m,t-1} \\ pr_{p,t} &= A_2 pr_{p,t-1} + B pr_{m,t-1},\end{aligned}$$

onde $A_1 = -(d_1/b_1)$, $A_2 = -(d_2/b_2)$ e $B = (e/b_2)$. Matricialmente, temos $\mathbf{X}_t = \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{bmatrix}$$

e \mathbf{X}_t é o vetor $\begin{bmatrix} pr_{m,t} & pr_{p,t} \end{bmatrix}^T$.

O ponto de equilíbrio é dado por $\mathbf{A}\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^*$, o que se resolve facilmente, obtendo

$$\begin{aligned} p_m^* &= (a_1 - c_1)/(b_1 + d_1) \quad \text{e} \\ p_p^* &= (a_2 - c_2)/(b_2 + d_2) + [e/(b_2 + d_2)](a_1 - c_1)/(b_1 + d_1). \end{aligned}$$

Para estudar a estabilidade do equilíbrio é preciso resolver o sistema, e tal como no caso uni-dimensional, a solução é $\mathbf{X}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{X}_0$. A questão se reduz a calcular as potências de uma matriz. Para isso é necessário determinar seus autovalores, que neste caso são simplesmente A_1 e A_2 . Sendo \mathbf{V} a matriz cujas colunas são os autovetores de \mathbf{A} , temos:

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{V} \begin{bmatrix} A_1^n & 0 \\ 0 & A_2^n \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1}.$$

Escrevendo a resposta em coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} p_{m,t} &= a\alpha^t + b\beta^t + p_m^* \\ p_{p,t} &= c\alpha^t + d\beta^t + p_p^*, \end{aligned}$$

com a, b, c, d constantes que dependem dos termos da matriz \mathbf{V} . Dessas contas decorre que o equilíbrio será estável se ambos os autovalores têm módulo menor que um, isto é, $d_1/b_1 < 1$ e $d_2/b_2 < 1$.

4 Um modelo não linear levando ao caos

O comportamento dos sistemas dinâmicos discretos vistos até o momento é bastante simples: ou eles vão para um ponto equilíbrio ou crescem indefinidamente. Existe ainda um outro comportamento possível, que é convergência para um 2-ciclo. Um 2-ciclo, ou uma órbita de período 2, ocorre quando a seqüência gerada por $x_{n+1} = f(x_n)$ oscila entre dois valores e não apenas um como no caso do ponto fixo. Um exemplo é $x_{n+1} = a - x_n$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, onde o leitor é convidado a mostrar que todo ponto inicial x_0 define um 2-ciclo oscilando entre os valores x_0 e $f(x_0)$.

Nesta seção vamos considerar um modelo de oferta e demanda não-linear. Mais especificamente, vamos assumir que a equação que modela a oferta é não linear, mantendo a demanda linear. A hipótese de não linearidade torna a análise do modelo muito mais complexa e permite uma série de comportamentos a longo prazo que não ocorriam no modelo linear, inclusive caos.

4.1 A equação logística discreta

Antes de analisar o modelo de oferta e demanda não linear vamos olhar para uma equação de diferenças não linear mais simples, mas que apresenta muitas

das características que serão vistas no nosso exemplo. Considere a equação de diferenças

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1 \text{ e } 1 \leq r \leq 4.$$

Essa equação é denominada *logística* (discreta) e é comumente usada em modelos de crescimento populacional, tanto de seres humanos quanto de microorganismos. Lembrando que $x_{n+1} = f(x_n)$, com $f(x) = rx(1 - x)$, não é difícil ver que os iterados $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$ pertencem ao intervalo $[0, 1]$ para $0 \leq r \leq 4$ (exercício). Fazendo $x^* = f(x^*)$, descobre-se que a origem é um ponto fixo para todo r , e para $r > 1$, temos o ponto fixo $x^* = 1 - 1/r$. Sobre a estabilidade, temos que $f'(0) = r$ e $f'(x^*) = 2 - r$, o que nos diz que a origem é estável para $r < 1$ e instável para $r > 1$ e que x^* é estável para $1 < r < 3$ e instável para $r > 3$. Assim, para $r > 3$, não temos nem a presença de um ponto fixo estável e nem o sistema não vai para infinito, já que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. O que acontece então para $r > 3$?

Para responder essa pergunta, vamos primeiramente definir $f^n(x)$ como sendo o n -ésimo iterado de x . Podemos procurar por 2-ciclos, ou seja, iterados $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots$ com $f^2(x_0) = x_0$. Isso reduz a tarefa de encontrar 2-ciclos a de encontrar pontos fixos de uma função, no caso $f^2(x)$. Note que se p e q são os pontos de um 2-ciclo, ou seja, $f(p) = q$ e $f(q) = p$, então ambos são pontos fixos de $f^2(x)$! Este resultado se generaliza para ciclos de comprimento n qualquer, isto é, qualquer ponto de um n -ciclo é ponto fixo de $f^n(x)$. Sendo assim, o problema de encontrar ciclos se resume a encontrar pontos fixos de $f^n(x)$, que nós já sabemos resolver em princípio. A estabilidade também é obtida de maneira análoga a feita para pontos fixos, atentando para o fato de que, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(f^n(x))_{x=x_0} = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{n-1}),$$

onde x_0, x_1, \dots, x_{n-1} formam um n -ciclo.

Vamos deixar as contas do 2-ciclo como exercício. O leitor interessado pode ver a dedução e a análise de estabilidade nas páginas 358 a 361 de [3], bem como idéias para encontrar os outros ciclos. Na Tabela 1 mostramos os valores aproximados de r_n para os quais aparecem 2^n ciclos.

Período da órbita estável	Valor do parâmetro
2	3.0
4	3.44948
8	3.54409
16	3.54644
∞	3.56994

Tabela 1: Surgimento de órbitas 2^n -periódicas.

O valor $r_\infty = 3.56994$ é o ponto de acumulação da seqüência formada pelos valores onde ocorre o surgimento de uma órbita 2^n -periódica. É possível mostrar

que, quando ocorre uma duplicação de período 2^n para 2^{n+1} , o 2^n ciclo continua a existir porém passa a ser instável, enquanto que o 2^{n+1} -ciclo que nasceu é estável. Note que essas mudanças de estabilidade para diferentes valores de r é um fenômeno que não ocorria nos sistemas vistos até então.

Surge então a pergunta natural: o que acontece para $r > r_\infty$? A resposta não é nada simples: para diversos valores de r a seqüência de iterações $\{x_n\}$ não converge para nenhum ponto fixo ou órbita periódica. Ao invés disso ela exibe comportamento aperiódico a longo prazo, uma das marcas registradas de caos. Surpreendentemente, para outros valores de r maiores que r_∞ voltamos a ter um comportamento mais simples, com a seqüência $\{x_n\}$ convergindo para um 3-ciclo, por exemplo.

Todos esses comportamentos a longo prazo da função logística podem ser explicitados através de uma figura, o *diagrama de órbitas*. Esse diagrama descreve o comportamento a longo prazo de $f(x)$ para diversos valores de r . Por sua beleza e capacidade de síntese esse diagrama é uma espécie de símbolo da dinâmica não linear. Vamos entender como ele é construído. O diagrama é um gráfico r por x . Para um valor de r inicial, escolha uma condição inicial arbitrária x_0 , um incremento Δ_r e itere o sistema um determinado número de vezes, digamos 100, sem armazenar os iterados. A intenção é que essas iterações sirvam para que o sistema evolua livremente até se aproximar de seu eventual comportamento a longo prazo. Depois calcule mais 100 iterados, $x_{101}, x_{102}, \dots, x_{200}$, e plote esses valores acima de r no diagrama. Em seguida vá para o próximo valor de r , $r + \Delta_r$, e repita o processo. Se $r = 2$, por exemplo, sabemos que todos esses valores são aproximadamente $1 - 1/r = 1/2$ e que portanto apenas um ponto será visto acima de $r = 2$ no diagrama. De maneira similar se $r = 3.4$, então temos um 2-ciclo estável e portanto dois pontos serão vistos no diagrama acima de r .

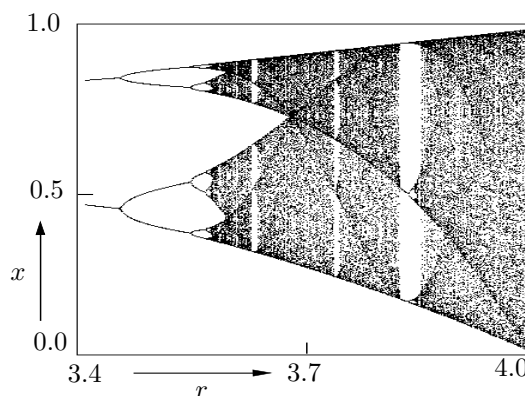


Figura 4: O diagrama de órbitas para a logística

A Figura 4 possui diversas propriedades interessantes que vão além do objetivo dessas notas. Gostaríamos de destacar dois pontos. O primeiro são as

janelas periódicas que aparecem mesmo para $r > r_\infty$, ou seja, mesmo após o sistema ter entrado em regime caótico. Para $r \approx 3.83$ vemos que o comportamento do sistema simplesmente estabiliza, com o surgimento de um 3-ciclo.

Além disso, para valores de r onde observamos caos temos *dependência sensível de condições iniciais*. Isso quer dizer que para duas condições iniciais muito próximas x_0 e $x_0 + \epsilon$, $\epsilon > 0$, temos comportamentos a longo prazo bastante distintos e imprevisíveis, diferentemente do que ocorria na seção anterior, onde tínhamos convergência para um ponto fixo ou crescimento para infinito para qualquer que fosse a condição inicial dada. A maneira mais fácil de ver isso é desenhar um gráfico simples onde o eixo x são os números naturais e o eixo y são os iterados de uma dada condição inicial x_0 . Na Figura 5 mostramos ao mesmo tempo as seqüências de 50 iterações de duas condições iniciais muito próximas, $x_0 = 0.20$ e $y_0 = 0.21$ e $r = 3.7$. Naturalmente escolhemos um valor de r para o qual o sistema está em regime caótico.

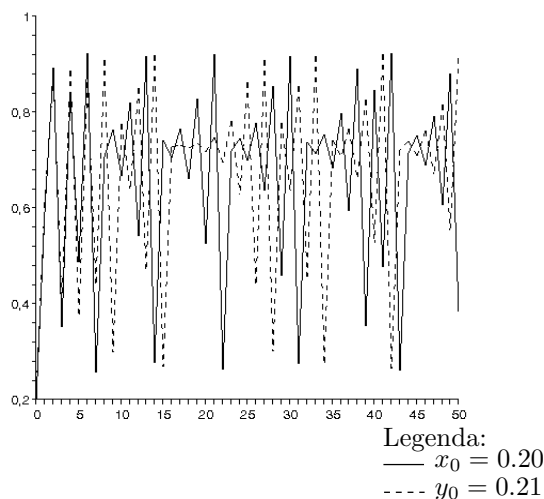


Figura 5: 50 iterados da logística para $x_0 = 0.20$ e $y_0 = 0.21$, com $r = 3.70$.

Note que no início elas estão muito próximas, como era de esperar, mas rapidamente se afastam e com poucas iterações elas distam consideravelmente, a ponto de ser impossível prever o comportamento de uma seqüência com base na outra. A dependência sensível a condições iniciais é talvez a propriedade mais expressiva de caos e tem conseqüências econômicas importantes. É muito difícil num modelo econômico medir exatamente a condição inicial exata para um sistema. Por exemplo: qual é o preço esperado inicial de um produto? Se o sistema apresenta caos então pequenos erros na medição desse estado inicial do modelo se amplificam enormemente com poucas iterações. Dessa forma os valores obtidos pelos iterados podem não representar fielmente o comportamento

econômico que o modelo tenta aproximar.

4.2 Um modelo de oferta e demanda não linear

Considere um modelo em que a demanda varia linearmente com o preço, mas em que a oferta varia de forma não linear. Uma hipótese razoável é que no começo os preços são baixos e a oferta cresce lentamente devido aos custos iniciais do investimento. Os preços sobem com o tempo e, quando estão altos, o crescimento da oferta de novo diminui porque está se esgotando a capacidade instalada. Tal situação sugere uma curva de oferta em forma de S. Seguindo o excelente artigo [4], vamos escolher a função arco tangente. Vamos supor também que o preço esperado leva em conta não só o preço no tempo anterior, mas também a diferença entre o preço esperado e o praticado. Temos então:

$$\begin{aligned} q_t^d &= a - bp_t \\ q_t^o &= \arctan(\mu p_t^e) \\ p_t^e &= p_{t-1}^e + \lambda(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \\ q_t^d &= q_t^o, \end{aligned} \quad (9)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\mu > 0$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. A expressão para o preço esperado (9) recebe o nome de *expectativas adaptativas*. Aqui, é mais fácil eliminar p_t e obter a equação de evolução de p_t^e , chegando a:

$$p_{t+1}^e = f(p_t^e) = (1 - \lambda)p_t^e + \lambda a/b - \lambda \arctan(\mu p_t^e)/b. \quad (10)$$

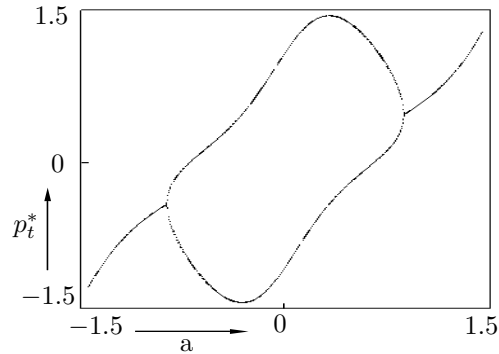
Dados a, b, λ, μ , podemos calcular o(s) ponto(s) fixo(s) de $f(p_t^e)$. Note que, em comparação com a logística, temos uma situação um pouco mais complexa pois existem 4 constantes a serem analisadas ao invés de uma. O que faremos será fixar três delas e variar a quarta, o que nos permite analisar a equação da mesma maneira que foi feita com a logística. As mesmas perguntas se colocam: Há um único ponto fixo? Mais especificamente, o que acontece como os pontos fixos de $f(x)$ quando a curva de demanda muda (a varia) ou λ varia? Aparecem pontos periódicos?

Inicialmente vamos fixar $\lambda = 0.3$, $b = 0.25$, $\mu = 3$ e variar o parâmetro a . A equação (10) fica

$$p_{t+1}^e = 0.7p_t^e + \frac{0.3a}{0.25} - \frac{0.3 \arctan(3p_t^e)}{0.25}. \quad (11)$$

Variando a em $[-1.5, 1.5]$ temos o diagrama de órbitas da Figura 6.

Para valores pequenos de a vemos na Figura 6 um único ponto fixo. Para $a \approx -0.9$ esse ponto fixo perde a estabilidade e dá lugar a um 2-ciclo. Ele fica sendo o único atrator até $a \approx 0.9$, onde novamente temos um ponto fixo. Essa simetria do diagrama vem, naturalmente, da simetria da função arco tangente em relação a origem.

Figura 6: Diagrama de órbitas com $\mu = 3.0$

Aumentando o valor de μ para 3.5 temos ainda um comportamento bastante simples, com a aparição de um 4-ciclo em $a \approx -0.75$. Para $\mu = 4$ temos a presença de caos para diversos valores de a . O mesmo ocorre para $\mu = 4.5$ e $\mu = 4.8$. Os diagramas de órbita para esses valores de $\mu = 3.5, 4.0, 4.5$ e 4.8 estão nas Figuras 7, 8, 9 e 10 respectivamente.

O leitor pode se perguntar o que acontece se, ao invés de a , deixamos um outro parâmetro variar e fixamos todos os outros. Será que o modelo ainda apresenta caos? Vamos fazer essa análise para o caso onde λ varia e $a = 0.8$, $b = 0.25$ e $\mu = 4$. Vamos plotar o diagrama de órbitas para essa situação, com λ variando entre 0.15 e 0.75.

A Figura 11 nos diz que para diversos valores de λ , particularmente os valores intermediários, temos um comportamento bastante irregular, com a presença de caos para quase todos os valores na faixa de 0.30 a 0.60. Para valores de λ perto de 0 ou perto de 1 temos comportamentos regulares, com a presença de pontos fixos, 2-ciclos e 4-ciclos. Existe uma interpretação econômica interessante para o parâmetro λ . No sistema que define o modelo de oferta e demanda não linear, a equação (9), que define como será composto o preço esperado no instante t , pode ser reescrita como

$$p_t^e = (1 - \lambda)p_{t-1}^e + \lambda p_{t-1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Essa equação diz que o preço esperado no instante presente t é igual a uma média ponderada por λ do preço esperado no período anterior com o preço de fato observado no período anterior. Na visão do produtor, valores de λ próximos a 1 implicam que o preço esperado por eles em t é basicamente o preço observado no instante $t - 1$ anterior. Por outro lado, se os produtores acreditam mais em suas expectativas do que nos preços observados, então estamos na situação λ perto de zero.

O que aprendemos olhando para o diagrama da Figura 11 é que se os produtores acreditam que o preço de hoje também será o preço de amanhã então o

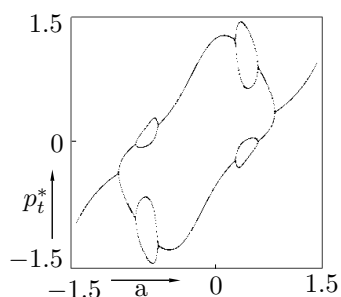


Figura 7: $\mu = 3.5$

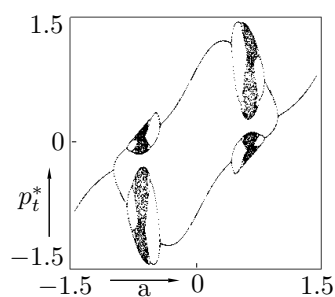


Figura 8: $\mu = 4.0$

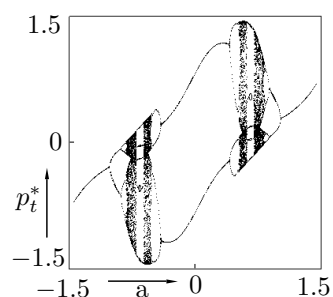


Figura 9: $\mu = 4.5$

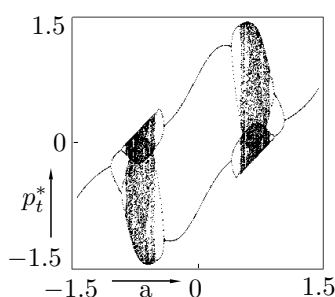


Figura 10: $\mu = 4.8$

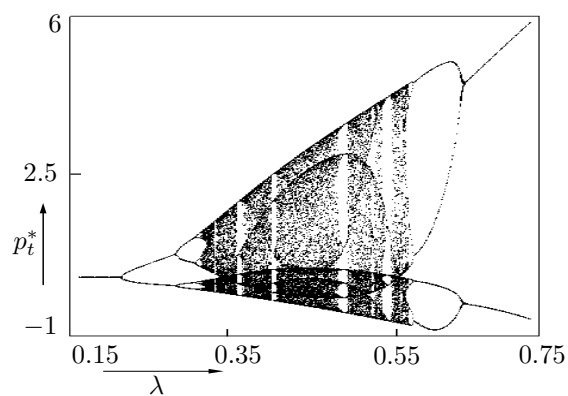


Figura 11: Diagrama de órbitas com λ variando

resultado a longo prazo dessa política é uma variação do preço entre dois valores: um 2-ciclo. Se eles crêem que suas expectativas são indicadores mais fiéis de preço então o sistema evolui para um único preço de equilíbrio p^* . Finalmente,

se os produtores estão em dúvida entre as duas atitudes (λ próximo de $1/2$) então a evolução dos preços é caótica, não se aproximando de nenhum valor específico.

5 Dinâmica de oligopólios

Modelos de oligopólios são bastante estudados nos cursos de economia. Considera-se n firmas colocando um mesmo produto no mercado. Cada firma tem um custo de produção C_i e tem que decidir a quantidade q_i a produzir, ou melhor a colocar no mercado, de modo a maximizar seu lucro. É dado que o preço p é função (em geral decrescente) da quantidade total produzida. Vejamos um exemplo simples com duas firmas:

$$\begin{aligned}C_1 &= a_1 q_1 \\C_2 &= a_2 q_2 \\Q &= q_1 + q_2 \\p &= P - Q,\end{aligned}$$

onde P , a_1 e a_2 são constantes positivas.

Neste modelo dizemos que os custos marginais (derivada do custo em relação à quantidade) são lineares. Cada firma tem renda $R_i = pq_i$, e lucro $L_i = R_i - C_i$. Supõe-se que cada firma ajusta sua produção de modo a maximizar seu lucro, supondo que as outras mantêm seus níveis de produção, ou seja, para cada i , a derivada parcial de L_i em relação a q_i é 0. Temos, no plano (q_1, q_2) , duas curvas dadas por $\partial L_1/\partial q_1 = 0$ e $\partial L_2/\partial q_2 = 0$, chamadas curvas de reação. As equações $\partial L_i/\partial q_i = 0$, por sua vez, chamam-se *equações de reação*. A interseção (ou as interseções) destas duas curvas é a chamada *solução de Cournot*. No nosso exemplo temos:

$$\begin{aligned}L_1 &= pq_1 - a_1 q_1 = (P - q_1 - q_2)q_1 - a_1 q_1 \\L_2 &= pq_2 - a_2 q_2 = (P - q_1 - q_2)q_2 - a_2 q_2,\end{aligned}$$

cujas derivadas parciais com relação a $q_i, i = 1, 2$, são

$$\begin{aligned}\partial L_1/\partial q_1 &= P - 2q_1 - q_2 - a_1 \\ \partial L_2/\partial q_2 &= P - 2q_2 - q_1 - a_2.\end{aligned}$$

As curvas de reação são duas retas, e a solução de Cournot é dada pelo ponto $\left[(2a_1 - a_2 - P)/3, (2a_2 - a_1 - P)/3 \right]$.

5.1 O modelo dinâmico

Vamos agora considerar o mesmo modelo do ponto de vista dinâmico. Queremos ver como evoluem as quantidades produzidas, e saber se o equilíbrio é estável. Vamos considerar n firmas, e também o caso em que os custos marginais não são

constantes, mas lineares. Aqui também vamos supor que cada firma ajusta sua produção no tempo t , de modo a maximizar seu lucro, supondo que as demais manterão no tempo t os níveis de produção do tempo $t - 1$. Começando com duas firmas e introduzindo o tempo, temos as equações

$$\begin{aligned} C_t^1 &= a_1 q_{1,t} \\ C_t^2 &= a_2 q_{2,t} \\ Q_t &= q_{1,t} + q_{2,t} \\ p_t &= P - Q_t \\ L_t^1 &= p_t q_{1,t} - a_1 q_{1,t} = (P - q_{1,t} - q_{2,t})q_{1,t} - a_1 q_{1,t} \\ L_t^2 &= p_t q_{2,t} - a_2 q_{2,t} = (P - q_{1,t} - q_{2,t})q_{2,t} - a_2 q_{2,t}. \end{aligned}$$

Novamente, vamos derivar $L_{1,t}$ em relação a $q_{1,t}$ e fazer $q_{2,t} = q_{2,t-1}$. Da mesma forma, vamos derivar $L_{2,t}$ em relação a $q_{2,t}$ e fazer $q_{1,t} = q_{1,t-1}$. Temos então

$$\begin{aligned} P - 2q_{1,t} - q_{2,t-1} - a_1 &= 0 \\ P - 2q_{2,t} - q_{1,t-1} - a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rearrmando essas equações, temos que a dinâmica para o caso de duas firmas é dada por

$$\begin{aligned} q_{1,t} &= (P - a_1)/2 - (1/2)q_{2,t-1} \\ q_{2,t} &= (P - a_2)/2 - (1/2)q_{1,t-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $q_{1,t}$ e $q_{2,t}$ constantes, é fácil ver que temos um equilíbrio em $q_1^* = (P - 2a_1 + a_2)/3$ e $q_2^* = (P + a_1 - 2a_2)/3$. Atribuindo valores numéricos a P, a_1 e a_2 podemos usar uma planilha para ver a evolução de $q_{1,t}$ e de $q_{2,t}$, começando com diferentes valores $q_{1,0}$ e $q_{2,0}$. Sejam $P = 5, a_1 = a_2 = 1$. Colocamos $q_{1,0}$ na célula $A1$ e $q_{2,0}$ na célula $B1$. Escrevemos em $A2$ a expressão $= 2 - B1/2$, e em $B2$, $= 2 - A1/2$. Depois é só copiar e colar ao longo das colunas A e B . Com 20 termos já vemos aparecer o ponto fixo $(4/3, 4/3)$, não importando muito os valores iniciais escolhidos.

Em notação matricial, temos uma equação $\mathbf{X}_t = \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{B}$, sendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e \mathbf{B} uma matriz coluna constante. Tal como antes, temos o ponto fixo $\mathbf{X}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, onde \mathbf{I} é matriz identidade 2×2 , e a mudança de variável $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^*$ conduz à equação $\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}\mathbf{Y}_{t-1}$, cuja solução $\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}^t\mathbf{Y}_0$. De novo temos $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$, onde \mathbf{D} é a matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{A} e \mathbf{V} é a matriz dos autovetores. Segue que $\mathbf{A}^t = \mathbf{V}\mathbf{D}^t\mathbf{V}^{-1}$, e o equilíbrio será um atrator se e só se cada um dos autovalores de \mathbf{A} tiver módulo menor que um. Como a matriz é 2×2 , é fácil calcular os autovalores: eles são $1/2$ e $-1/2$.

O mesmo modelo com n firmas leva a uma matriz $n \times n$, que tem 0 nos coeficientes da diagonal e $-1/2$ em todas as outras posições. Um pouco mais de

álgebra linear (exercício) permite achar os autovalores desta matriz: São $n - 1$ autovalores iguais a $1/2$ e um autovalor igual a $(1 - n)/2$. Logo, a partir de $n = 3$ o equilíbrio não é mais atrator.

5.2 Custos quadráticos

Dizer que os custos são quadráticos é dizer que agora temos para cada i , $C_{i,t} = a_i q_{i,t}^2$. Analogamente, dizemos que nesse caso os custos marginais são quadráticos. É fácil ver que de novo teremos equações de recorrência lineares. A diferença é que a matriz \mathbf{A} , que continua com a diagonal nula, não tem mais todos os outros termos iguais. No caso 2×2 , a matriz fica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1/(2 + 2a_1) \\ -1/(2 + 2a_2) & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são iguais a $\pm 1/\sqrt{(1 + 2a_1)(1 + 2a_2)}$. E novamente ambos são menores que 1 em valor absoluto, e portanto, o equilíbrio é estável. Com 3 firmas, a matriz fica:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1/(2 + 2a_1) & -1/(2 + 2a_1) \\ -1/(2 + 2a_2) & 0 & -1/(2 + 2a_2) \\ -1/(2 + 2a_3) & -1/(2 + 2a_3) & 0 \end{bmatrix}.$$

De maneira geral, teremos sempre uma matriz em que na linha j , o termo da diagonal principal é zero e os outros são todos iguais a uma constante c_j , que está entre 0 e -1 . A questão é saber se todos os autovalores desta matriz têm módulo menor que 1. Aqui a álgebra linear é mais difícil e técnicas mais sofisticadas são necessárias. Mais detalhes em [5].

Vamos modificar um pouco o modelo, supondo que cada firma ajusta sua quantidade produzida de forma incompleta e não instantânea, em oposição ao caso anterior, que é chamado pelos economistas de *caso de ajuste completo e instantâneo da produção*. A hipótese agora é que o ajuste de produção se faz da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q_{1,t} &= q_{1,t-1} + k_1(x_{1,t} - q_{1,t-1}), \\ q_{2,t} &= q_{2,t-1} + k_2(x_{2,t} - q_{2,t-1}). \end{aligned}$$

As firmas ajustam a produção para o tempo t , proporcionalmente à diferença entre a produção do tempo $t - 1$ e a uma produção desejada no tempo t . Esta produção desejada $x_{i,t}$ é dada pelas equações de reação do modelo. Por isso o nome incompleto e não instantâneo. Se $k_i = 1$ para todo i , temos o caso anterior (ajuste completo e instantâneo). Substituindo $x_{i,t}$ pelo valor obtido da equação de reação, temos:

$$\begin{aligned} q_{1,t} &= \frac{k_1}{2}(P - a_1) + (1 - k_1)q_{1,t-1} - \frac{k_1}{2}q_{2,t-1} \\ q_{2,t} &= \frac{k_2}{2}(P - a_2) + (1 - k_2)q_{2,t-1} - \frac{k_2}{2}q_{1,t-1}. \end{aligned}$$

Em vez de resolver o sistema no caso geral, vamos particularizar para $k_1 = k_2$ e ver que mesmo assim, pode ocorrer estabilidade ou instabilidade do equilíbrio de Cournot, dependendo dos valores de k_1 e k_2 . Mais precisamente, começando com produções iniciais $q_{1,0}$ e $q_{2,0}$, podemos ter convergência para o equilíbrio, oscilação entre dois valores, ou oscilações com amplitude cada vez maior. Tal como antes, temos $\mathbf{X}_t = \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{B}$, com ponto de equilíbrio $\mathbf{X}^* = \mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, e os autovalores de \mathbf{A} são $1 - k/2$ e $1 - 3k/2$. É fácil ver que a condição que ambos tenham módulo menor que 1 é $0 < k < 4/3$. Vejamos na planilha o que acontece com, por exemplo, $k = 1/2, k = 4/3, k = 2$. Fazendo $P = 3$ e $a_1 = a_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}q_{1,t} &= k + (1 - k)q_{1,t-1} - (k/2)q_{2,t-1} \\q_{2,t} &= k + (1 - k)q_{2,t-1} - (k/2)q_{1,t-1}.\end{aligned}$$

Para $k = 1/2$, escrevemos na planilha em $A3$ e em $B3$ os valores iniciais 1 e 2. Em $A4$ escrevemos $= 1/2 + (1/2) * A3 - (1/4) * B3$ e em $B4$ escrevemos $= 1/2 - (1/4) * A3 + (1/2) * B3$. Depois é só copiar e colar no resto das colunas. Com 28 termos vemos aparecer o ponto de equilíbrio (0.666, 0.667).

Fazendo o mesmo procedimento para $k = 4/3$, as fórmulas agora em $E4$ e $F4$ são, respectivamente, $= 4/3 + (-1/3) * E3 - (2/3) * F3$ e $= 4/3 - 2(2/3 * E3 - 1/4 * F3)$, e vemos a oscilação entre dois pares de valores. Fazendo agora $k = 2$, escrevemos em $H4$ e $I4$, respectivamente, $= 2 + H3 - I3$ e $= 2 - H3 + I3$, e percebemos a oscilação cada vez maior.

6 O modelo não linear de ciclos comerciais de Hicks

Nessa seção vamos estudar uma variante do modelo de ciclos comerciais de Hicks, descrita em [6]. Esse modelo descreve o comportamento dinâmico da renda, do consumo e dos investimentos de um país. O modelo de Hicks é do tipo *multiplicador-acelerador*. Essa designação se refere a maneira como a dinâmica das variáveis renda e investimento é modelada. Um modelo que incorpora a modelagem multiplicador-acelerador pressupõe que investimento aumenta renda (multiplicador) e que um aumento na renda por si induz um aumento nos investimentos (acelerador). Um outro aspecto relevante do modelo é que ele assume um teto e um piso de investimento. Isso impede que as trajetórias cresçam indefinidamente, mas induz um modelo não-linear, ou mais precisamente, linear por partes.

Modelando o consumo em tempo t baseado apenas na renda do instante anterior dá origem a um sistema bi-dimensional. Se considerarmos a renda nos instantes $t - 1$, $t - 2$ e $t - 3$, então temos um sistema tridimensional. Vamos nos fazer as mesmas perguntas que fizemos para os outros modelos: existe equilíbrio estável? Existe alguma órbita periódica para a qual as trajetórias converjam? O modelo apresenta caos?

6.1 O modelo bi-dimensional

Considerando que o consumo no presente depende apenas da renda no instante anterior, o modelo de Hicks é descrito pelas 4 equações a seguir:

$$C_t = mY_{t-1} \quad (\text{consumo}) \quad (12)$$

$$I_t = I_t^{\text{ind}} + I^{\text{aut}} \quad (\text{investimento total}) \quad (13)$$

$$I_t^{\text{ind}} = \max\{a(Y_{t-1} - Y_{t-2}), -I^P\} \quad (\text{investimento induzido}) \quad (14)$$

$$Y_t = \min\{C_t + I_t, Y^T\} \quad (\text{renda}). \quad (15)$$

De acordo com a equação (12), o consumo atual C_t é proporcional à renda do período anterior Y_{t-1} , onde m é *propensão marginal ao consumo*, $0 < m < 1$. A equação (13) nos diz que o investimento total I_t é igual a um investimento autônomo constante I^{aut} mais o investimento induzido I_t^{ind} . Em (14), temos a equação que descreve o investimento induzido. Ele é proporcional ao crescimento na renda nacional, desde que esta seja maior que o piso de investimento $-I^P$. Observe que investimento negativo líquido equivale a investimento bruto igual a 0. A constante a é chamada de acelerador e, baseado em dados econômicos, Hicks definiu $a > 1$. Finalmente, a equação (15) diz que a renda Y_t é igual a consumo mais investimento total, desde que ela seja menor que o teto de renda Y^T , que equivale a situação de pleno emprego na economia.

Substituindo (12)-(14) em (15), obtemos uma equação de segunda ordem semelhante a do modelo de Goodwin (3.1), porém linear por partes:

$$Y_t = \min\{mY_{t-1} + \max\{a(Y_{t-1} - Y_{t-2}), -I^P\} + I^{\text{aut}}, Y^T\}. \quad (16)$$

A equação (16) possui um único equilíbrio, $Y^e = I^{\text{aut}}/(1 - m)$, e esse equilíbrio é instável. Um critério simples e fácil de usar para analisar a estabilidade de pontos fixos para uma equação de segunda ordem está descrito em [7]. Definindo $x_t = Y_t$ e $y_t = Y_{t-1}$, podemos transformar (16) em um sistema:

$$x_{t+1} = \min\{mx_t + \max\{a(x_t - y_t), -I^P\} + I^{\text{aut}}, Y^T\} \quad (17)$$

$$y_{t+1} = x_t. \quad (18)$$

Dessa forma colocamos o sistema de Hicks no formato de um sistema de equações de diferenças da forma $(x_{t+1}, y_{t+1}) = H(x_t, y_t)$, onde

$$H(x, y) = (\min\{mx + \max\{a(x - y), -I^P\} + I^{\text{aut}}, Y^T\}, x). \quad (19)$$

A função $H(x, y)$ possui um único equilíbrio instável, (Y^e, Y^e) , e não é difícil ver que as trajetórias são limitadas.

A intuição econômica por trás do modelo, conforme descrito pelo próprio Hicks, é que se começarmos com $Y_0 = Y_1 = Y^T$, temos que $I_2^{\text{ind}} = 0$. Isso causa uma queda na renda e a economia tende a cair. Com essa queda na renda, o investimento induzido tende a ficar negativo até atingir seu nível mais baixo $-I^P$. No entanto, esse decréscimo vai ficando cada vez menor e em

determinado momento o investimento induzido fica maior que $-I^P$ e a renda começa a subir, iniciando um ciclo de crescimento econômico. Esse crescimento continua até que para algum t tenhamos $Y_t = Y_{t+1} = Y^T$, causando uma nova queda na economia e reiniciando o ciclo.

Apesar de imprecisa matematicamente, essa descrição intuitiva dada por Hicks de fato se verifica para certas escolhas de parâmetros. No entanto ela não é completa e não responde a uma questão fundamental: O que acontece então com as trajetórias a longo prazo? A resposta está no teorema a seguir, que será apresentado sem demonstração. Para maiores detalhes, ver [6].

Teorema 1. *Para $a > 1$ a função $H(x, y)$ possui um conjunto atrator K , que é uma curva simples fechada linear por partes (no plano). O ponto de equilíbrio está no interior da curva K e todas as outras trajetórias são atraídas para K , podendo ter comportamento periódico ou quase periódico.*

O teorema afirma que as trajetórias que não são periódicas são *quase periódicas*. Não vamos definir esse conceito no texto: intuitivamente essas trajetórias são aproximadamente periódicas. Não há caos nem dependência sensível de condições iniciais. Sendo assim, o Teorema 1 confirma a intuição de Hicks sobre o comportamento a longo prazo do modelo bidimensional.

6.2 O modelo tridimensional

Vamos agora supor que o consumo C_t e que o investimento induzido I_t^{ind} dependam de até três instantes anteriores. Essas hipóteses dão origem ao modelo de Hicks em três dimensões:

$$C_t = m_1 Y_{t-1} + m_2 Y_{t-2} + m_3 Y_{t-3} \quad (20)$$

$$I_t = I_t^{\text{ind}} + I^{\text{aut}} \quad (21)$$

$$I_t^{\text{ind}} = \max\{a_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + a_2(Y_{t-2} - Y_{t-3}), -I^P\} \quad (22)$$

$$Y_t = \min\{C_t + I_t, Y^T\} \quad (23)$$

Os parâmetros m_1, m_2 e m_3 são chamados *coeficientes de consumo parciais* e são tais que $m = m_1 + m_2 + m_3 < 1$, enquanto que a_1 e a_2 , chamados *coeficientes parciais de investimento*, são sempre maiores que 0. Substituindo (22) em (21), (20)-(21) em (23) e fazendo a troca de variáveis $x_t = Y_t, y_t = Y_{t-1}$ e $z_t = Y_{t-2}$ temos

$$x_{t+1} = \min\{m_1 x_t + m_2 y_t + m_3 z_t + \max\{a_1(x_t - y_t) + a_2(y_t - z_t), -I^P\} + I^{\text{aut}}, Y^T\}$$

$$y_{t+1} = x_t$$

$$z_{t+1} = y_t.$$

Alternativamente, podemos expressar esse sistema por

$$(x_{t+1}, y_{t+1}, z_{t+1}) = H(x_t, y_t, z_t),$$

onde

$$H(x, y, z) = \min\{m_1x + m_2y + m_3z + \max\{a_1(x-y) + a_2(y-z), -I^P\} + I^{\text{aut}}, Y^T\}.$$

A função H possui um único ponto de equilíbrio $E = (Y^e, Y^e, Y^e)$, onde $Y^e = I^{\text{aut}}/(1-m)$. Definindo o piso de renda $Y^P = (Y^{\text{aut}} - I^P)/(1-m)$, é simples ver que a função $H(x, y, z)$ leva o conjunto $D = \{(x, y, z) | Y^P \leq x, y, z \leq Y^T\}$ nele mesmo, desde que $Y^e < Y^T$. Assim, todas as trajetórias no modelo de Hicks tridimensional são limitadas. O que pode ser dito sobre o comportamento a longo prazo das trajetórias quando o equilíbrio é instável?

A resposta é que para muitos valores dos parâmetros temos caos. As trajetórias são atraídas para conjuntos bastante complexos, denominados *atratores estranhos*. Não vamos nos preocupar aqui em defini-los com precisão, mas são conjuntos de \mathbb{R}^3 com estrutura semelhante a um conjunto de Cantor. Também pode acontecer coexistência de atratores: para uma determinada escolha de parâmetros, podemos ter um atrator estranho e uma órbita periódica estável. O que determina se uma determinada órbita vai ser atraída por um conjunto ou por outro é a condição inicial. Cada atrator possui sua *bacia de atração*, ou seja, um conjunto de condições iniciais para as quais a trajetória se aproxima do atrator. Vamos mostrar algumas trajetórias do sistema tridimensional para diferentes parâmetros.

As figuras são projeções nos eixos (x, y) . Para obtê-las simplesmente escolhemos uma condição inicial e deixamos o sistema evoluir por 1 000 iterações, sem armazenar os valores. A partir daí geramos mais 10 000 iterados e marcamos seus valores na figura. Nas Figuras ?? e ?? os parâmetros usados foram $Y^T = 150$, $I^P = 10$, $I^{\text{aut}} = 20$, $m_1 = 0.54$, $m_2 = 0.25$, $m_3 = 0$, $a_1 = 0.6$ e $a_2 = 1.4$. Na Figura ?? a condição inicial usada foi $(x_0, y_0, z_0) = (120, 100, 150)$, e na Figura ?? utilizamos $(x_0, y_0, z_0) = (Y^T, Y^T, Y^T)$. Temos a coexistência de um atrator estranho (Figura ??) com uma órbita 20-periódica. Na Figura ?? só são vistos 19 pontos pois dois deles têm coordenadas $(x, y) = (Y^T, Y^T)$. A condição inicial é que determina de qual dos atratores uma trajetória se aproxima.

A Figura ?? mostra um outro atrator estranho para os parâmetros $Y^T = 275$, $I^P = 10$, $I^{\text{aut}} = 20$, $m_1 = 0.55$, $m_2 = 0.2$, $m_3 = 0.1$, $a_1 = 0.25$ e $a_2 = 1.27$. Ele é o único conjunto atrator para esse conjunto de parâmetros. Na Figura ?? os parâmetros são $Y^T = 250$, $I^P = 10$, $I^{\text{aut}} = 20$, $m_1 = 0.5$, $m_2 = 0.2$, $m_3 = 0.14$, $a_1 = 0.55$ e $a_2 = 1.31$. Temos aqui novamente a presença de dois atratores, dessa vez desenhados juntos. Um deles é um atrator quasi-periódico, do qual não vamos falar aqui (ver [6]), e o outro é simplesmente uma órbita 2-periódica, indicada pelas setas.

Para ilustrar a presença de dependência sensível de condições iniciais nesse modelo, vamos mostrar a série temporal da variável x_t , de maneira similar ao que foi feito na Figura 5. Vamos escolher os mesmo parâmetros da Figura ??, com condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (110, 110, 110)$ e $(x'_0, y'_0, z'_0) = (110.1, 110, 110)$. Após iterar 500 vezes para que a trajetória se aproxime do atrator, computamos 50 iterados. O resultado está na Figura 12. Note que apesar de terem começado praticamente juntas as trajetórias são bem diferentes a longo prazo.

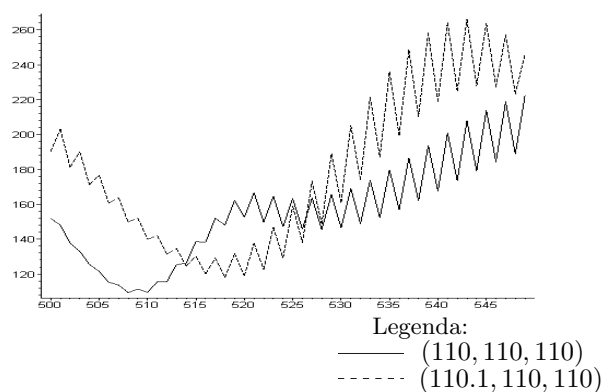


Figura 12: Duas trajetórias após 500 iterações.

Gostaríamos de observar que apesar de ser bem compreendido do ponto de vista numérico, o modelo de Hicks tridimensional apresenta diversas questões teóricas em aberto. Ainda não se entende completamente o processo de aparição de alguns tipos de atratores para determinados valores dos parâmetros.

Em ambos exemplos consideramos $m_1 > m_2 > m_3 \geq 0$, de modo que a maior fração da renda consumida no presente advém da renda de um período apenas, enquanto que a menor fração é consumida com atraso de três períodos. De maneira similar, escolhemos $a_2 > a_1$ de modo que a maior parte do investimento induzido I^{ind} ocorre na mudança do terceiro para o segundo período. Estudos indicam que esse padrão de fato se verifica: usualmente o tempo necessário para a tomada de decisões sobre investimentos é mais longo do que o período de consumo mais significativo. Dessa forma, para o modelo de Hicks tridimensional, flutuações caóticas na renda podem ocorrer para valores realistas dos parâmetros.

Referências

- [1] R. Shone. *Economic Dynamics*. Cambridge, second edition, 2002.
- [2] M. Ezekiel. The cobweb theorem. *The Quarterly Journal of Economics*, 52:255–280, 1938.
- [3] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press, 1994.
- [4] C. H. Hommes. Dynamics of the cobweb model with adaptative expectations and nonlinear supply and demand. *Journal of Economic Behavior and Organization*, 24:315–335, 1992.
- [5] B.K. Pagnoncelli, C.F.B. Palmeira, M.A.K Schnoor, and R.C.C. Pinto. Stability analysis and the oligopoly problem. *Pré-print PUC-Rio número 21*, 2006.
- [6] C.H. Hommes. *Chaotic Dynamics in Economic Models - Some simple case-studies*. Groningen Thesis in Economics, Management and Organization. Wolters-Noordhoff, 1991.
- [7] S.N. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, second edition, 1999.